Ronny Kjelsberg

Noen grunnleggende elementer innen manipulasjon av brøk og enkle algebraiske uttrykk

Contents

1 Hvordan bli en BRØKREGNER på en, to, tre:

1.1 EN: Basics

1.1.1 Hva er en brøk?

En brøk bruker vi til å beskrive andeler av noe. Dersom du er i et selskap med 50 inviterte gjester og bare 38 møter opp, kan du for eksempel si at $\frac{38}{50}$ av de inviterte møtte. Dersom margarinpakken i kjøleskapet er på 500g og kakeoppskrifta di sier at du skal ha i 200g margarin, så kan du si at du må bruke $\frac{200}{500}$ av margarinpakken på å bake napoleonskake (eller hva det nå måtte være).

Brøkstreken er det samme som et divisjonstegn (deletegn), det vil si at $\frac{1}{3}$ er det samme som $1:3$. Skrevet som desimaltall blir dette 0,333333333333333 osv. og er det vi til vanlig kaller *en tredel* (Legg merke til at det i matematikken er vanlig å si "tredeler", "firedeler", "femdeler" osv. og ikke "tred*je*deler", uten at det er vits i å gjøre noen stor sak ut av det). Vi ser at vi kan ikke skrive denne brøken nøyaktig som et desimaltall, det ville tatt uendelig mange desimaler, og det har vi rett og slett ikke tid til å skrive. En viktig motivasjon for brøkregning er altså at vi skal kunne regne NØYAKTIG (noe som er veldig viktig i matematikken (og også i andre fagområder som benytter seg av den)), uten å måtte skrive desimaltall til barnebarna våre blir gamle.

En brøk består foruten av brøkstreken, -, av en *teller* (tallet over brøkstreken), og en *nevner* (tallet under brøkstreken). I brøken $\frac{8}{2}$ er 8 telleren, mens 2 er nevneren. $\frac{8}{2}$ er forøvrig 4 (så vi ser at *alle* brøker blir ikke stygge desimaltall), men det skal vi komme tilbake til etterhvert.

1.1.2 Å utvide brøker:

En brøk kan skrives på flere forskjellige måter. $\frac{1}{3}$ er for eksempel det samme som $\frac{2}{6}$ som igjen er det samme som $\frac{3}{9}$ osv.

Å utvide en brøk vil si å lage en brøk hvor både teller og nevner er *større* enn i brøken du starter med, men hvor brøken representerer det samme tallet (som i eksemplene over).

Dette gjør vi ved å multiplisere (gange) i teller og nevner av brøken med det samme tallet. Brøken forandrer da ikke *verdi*. I eksempelet over ser vi at

$$\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6},\text{at }\frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{3}{9},$$

$$\text{(og forsåvidt også at }\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{6\cdot\frac{3}{2}}=\frac{3}{9}\text{) .}$$

Denne kunnskapen kan vi for eksempel også bruke til å løse problemer av typen:

Hvilket tall er x? (Ikke bli redd for x, selv om den ser ut som en skummel bokstav er den egentlig bare et vanlig vennligsinnet tall.)

$$\frac{7}{15} = \frac{x}{75}$$

Her ser vi at $\frac{x}{75}$ er en brøk som er utvidet fra $\frac{7}{15}$. Det vil si at det tallet vi må multiplisere 15 med for å få 75, er det samme som vi må multiplisere 7 med for å få x. (Les gjerne setningen en gang til dersom det gikk fort.) Vi ser ganske fort at

$$15 \cdot 5 = 75$$

(dette tallet (5) kan vi også regne ut ved å ta $\frac{75}{15} = 5$). Da blir det manglende tallet

$$x = 7 \cdot 5 = 35.$$

Den utvidede brøken blir altså

$$\frac{7 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{35}{75}\ .$$

Å kunne utvide brøker er viktig når vi skal addere dem (legge dem sammen) og subtrahere dem (trekke dem fra hverandre). Da må alle brøkene nemlig ha den samme nevneren. Det kan vi få til ved å utvide brøkene - mer om det siden.

1.1.3 Forkorting av brøk:

På samme måte som vi kan utvide en brøk ved å multiplisere med det samme tallet i teller og nevner, kan vi forkorte en brøk ved å dividere teller og nevner med samme tall. Dersom vi tar et nytt eksempel får vi at

$$\frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}, \text{ dvs. } \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ ,$$

og tilsvarende for $\frac{15}{35}$,

$$\frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}\ ,$$

dvs.

$$\frac{15}{35} = \frac{3}{7}\ .$$

Vanligvis er vi interessert i å skrivet svaret/resultatet av en beregning på en så enkel form som mulig. Hvorfor skrive $\frac{333}{666}$, når man kan skrive $\frac{1}{2}$? For en brøk vil dette si at vi er interessert i å skrive den med *så liten nevner som mulig*.

Slik ser vi at vi kan forkorte de innledende fest/margarineksemplene på denne måten:

Antall inviterte som møtte:

$$\frac{38}{50}, \frac{38:2}{50:2} = \frac{19}{25}\ .$$

Andel av margarinpakken i kaka:

$$\frac{200}{500}, \frac{200:100}{500:100} = \frac{2}{5}\ .$$

Faktorisering Hvordan finner vi så ut hvilke tall vi kan dividere med for å få forkortet brøken? Når vi skal svare på dette må vi si litt om *primtall* og *faktorisering,* uten at vi skal gå veldig dypt inn i den materien.

Et primtall er kort sagt et tall som kun lar seg dele på 1 og seg selv (dvs. hvor resultatet blir et helt tall). Eksempler på slike (i stigende rekkefølge) er: 2,3,5,7,11,13,17 (bare prøv deg fram - som du ser blir det stadig lengre mellom de etterhvert, men de fortsetter å dukke opp med ujevne mellomrom oppover i tallrekka) Dette er altså tall som ikke lar seg forkorte ytterligere! Dvs. *dersom telleren eller nevneren i en brøk er blitt et primtall, kan vi ikke forkorte brøken mer, dersom ikke det samme primtallet finnes i både teller og nevner..*

Dette betyr også en annen ting; I og med at primtallene er tallene som bare kan deles på 1 og seg selv betyr det at *alle andre tall kan skrives som et produkt av primtall.* For å ta noen eksempel:

$$\begin{aligned} 8 &= 2\cdot 2\cdot 2, \\ 9 &= 3\cdot 3, \\ 18 &= 3\cdot 3\cdot 2 (= 9\cdot 2), \\ 210 &= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7. \end{aligned}$$

Det er dette vi kaller å *faktorisere* et tall. Prøv deg gjerne fram på noen tall - forsøk å dividere tallene på noen av primtallene og se hvilke som går opp (de som går opp er en faktor i tallet ditt). Du vil fort begynne å se noen sammenhenger. Alle partall er f.eks. delelige på 2, så ingen partall (bortsett fra 2) er primtall.

Javel, dette var jo vel og bra, men hvordan kan vi bruke dette til brøkregning? For å finne ut hvordan vi kan forkorte en brøk så mye som mulig, kan vi faktorisere teller og nevner, og forkorte med de felles faktorene (de primtallene som finnes i både teller og nevner). La oss derfor ta et (stygt) eksempel:

$$\frac{357}{578} = \frac{3\cdot 7\cdot 17}{2\cdot 17\cdot 17}$$

Her ser vi at teller og nevner har en felles faktor, nemlig 17. Når vi så dividerer med 17 i teller og nevner står vi tilbake med

$$\frac{3\cdot 7}{2\cdot 17} = \frac{21}{34},$$

og mer enn dette får vi ikke forkortet brøken.

1.2 TO: Interaksjon mellom brøker (pluss, minus, gange, dele og slikt)

1.2.1 Å addere brøker

For å ta festeksempelet en gang til: Vi sa at 38 av 50 inviterte dukket opp på festen. Så viser det seg at tre etternølere har dukket opp. Først kom altså $\frac{38}{50}$, deretter dukket $\frac{3}{50}$ opp. Da har det tilsammen kommet

$$\frac{38+3}{50} = \frac{41}{50} .$$

Her ser vi at vi enkelt kan addere sammen 38+3, fordi de er *en del av den samme mengden* - de har samme nevner.

For at to brøker skal kunne adderes, er de altså nødt til å ha *samme nevner*. Dersom brøkene som skal adderes ikke har felles nevner, er vi nødt til å utvide de til det er tilfellet. Når brøkene så har felles nevner, kan vi enkelt addere de *ved å addere tellerene*.

Vi tar et eksempel:

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = ?$$

Her ser vi ganske fort at $\frac{2}{4}$ kan utvides slik at nevneren blir 8 ved å multiplisere teller og nevner med 2 ($2 \cdot 4 = 8$). Vi kan da regne ut stykket over på følgende måte:

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5+4}{8} = \underline{\underline{\frac{9}{8}}}.$$

Her ser vi at når vi har fått samme nevner på begge brøkene, så kan vi sette de to tallene på felles brøkstrek, og addere tellerene.

(Vi ser nå at vi i svaret får en brøk hvor telleren er større enn nevneren (en uekte brøk), denne er det også ofte vanlig å skrive på denne måten: $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$, hvor $1\frac{1}{8}$ betyr $1 + \frac{1}{8}$, altså en og en åttedel. Denne siste skrivemåten ($1\frac{1}{8}$) kalles blandet tall. Dette er likevel mer konvensjon enn matematikk, så vi skal ikke bruke mer tid på det.)

Dette siste eksempelet var enkelt, her kunne vi utvide den siste nevneren så den ble lik den første. Det er ikke alltid så enkelt. En enkel måte å finne en felles nevner på er å multiplisere teller og nevner i begge brøkene med *den andre* nevneren, men dette gir oss ikke nødvendigvis den *minste* felles nevneren (og den vil vi jo gjerne ha for å få et enklest mulig svar). Dersom vi vil finne den minste felles nevner, kan vi faktorisere nevnerene i brøkene våre, da finner vi den minste felles nevner ved å multiplisere sammen faktorene fra brøkene til vi har sikret at alle brøker har fått med alle sine faktorer (men ikke mer). Hørtes dette vanskelig ut? Det er ikke det. Vi tar et litt verre eksempel:

$$\frac{5}{9} + \frac{3}{6} = ?$$

Når vi forsøker å faktorisere nevnerene ser vi at vi får:

$$\frac{5}{9}+\frac{3}{6}=\frac{5}{3\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 2}$$

Den minste felles nevneren blir da $3\cdot 3\cdot 2=18$. Da ser vi at vi har fått med alle faktorene fra 9, $(3\cdot 3)$, og alle fra 6, $(3\cdot 2)$. Dermed slipper vi å forkorte bort det 3-tallet de begge har til felles til slutt. OK? Vi fullfører:

$$\frac{5}{9}+\frac{3}{6}=\frac{5}{3\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 2}=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 3}=\frac{10}{18}+\frac{9}{18}=\frac{10+9}{18}=\frac{19}{18}\underline{\underline{=1\frac{1}{18}}}$$

La oss fortløpende ta et eksempel til, nå med tre brøker (det blir tilsvarende, man kan eventuelt legge sammen to av de og så legge til den tredje til slutt og slik redusere det til to addisjoner á to brøker, men det er egentlig ikke enklere):

$$\frac{8}{7}+\frac{5}{3}+\frac{2}{8}=\frac{8}{7}+\frac{5}{3}+\frac{2}{2\cdot 2\cdot 2}\ .$$

Her ser vi at nevnerene ikke har noen felles faktor. Da må vi bite i det sure eplet, og rett og slett lage oss en felles faktor som er alle de tre nevnerene multiplisert: $7\cdot 3\cdot 8=168$. Da blir resten av utregningen:

$$\frac{8}{7}+\frac{5}{3}+\frac{2}{8}=\frac{8\cdot 3\cdot 8}{7\cdot 3\cdot 8}+\frac{5\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 8}+\frac{2\cdot 7\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 3}=\frac{192+280+42}{168}=\frac{514}{168}\underline{\underline{=3\frac{5}{84}}}\ .$$

Dette er altså prinsippene for å summere brøk. Resten er bare øvelse, og det gjør som kjent mester.

1.2.2 Å subtrahere brøker

Når vi allerede har lært oss å addere brøker, blir dette en rimelig smal sak. Å subtrahere brøker foregår nemlig på samme måte som addisjon. Man finner en felles nevner, setter på fellers brøkstrek, og så *subtraherer* man tellerene. For eksempel:

$$\frac{5}{8}-\frac{8}{6}=\frac{5}{2\cdot 2\cdot 2}-\frac{8}{2\cdot 3}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{8\cdot 2\cdot 2}{6\cdot 2\cdot 2}=\frac{15-32}{24}\underline{\underline{=-\frac{17}{24}}}\ .$$

Ingenting nytt under solen her, så vi hopper hurtig videre.

1.2.3 Å multiplisere brøker

Å multiplisere en brøk med et helt tall Å multiplisere en brøk med et helt tall er enkelt. Ta for eksempel $\frac{1}{2}\cdot 2$. Det dobbelte av $\frac{1}{2}$ er jo 1. Dette får vi enkelt til når vi multipliserer det hele tallet i *telleren*. Altså

$$\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}\ .$$

Enkelt og greit. En gang til:

$$\frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5} = \underline{\underline{1\frac{1}{5}}} \ .$$

Enkelt og greit, så vi hopper kjapt videre.

Å multiplisere en brøk med en brøk $\frac{1}{2}$multiplisert med $\frac{1}{2}$blir en halv gang en halv, halvparten av en halv, som er en firedel. Det kan vi tenke oss til, men vi ser at vi kan regne det ut ved å ta

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \ .$$

Når vi skal multiplisere to brøker så må vi altså multiplisere *teller med teller*, og *nevner med nevner*. Denne metoden kan vi også bruke på oppgaver som ikke er like intuitive:

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = ?$$

går som en lek når vi bare kan multiplisere på denne måten:

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 4}{16 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{20}{432} \ .$$

Så må vi selvsagt også forkorte sluttsvaret som vi lærte for et par delkapittel siden:

$$\frac{20}{432} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{5}{108}}} \ .$$

Dette er den enkle essensen i multiplikasjon av brøker.

1.2.4 Å dividere brøker

Som subtraksjon på mange måter er det motsatte av addisjon, er divisjon det motsatte av multiplikasjon, sånn litt enkelt sagt. Vi husker også at en brøkstrek og et deletegn egentlig er det samme. Slik sett er en divisjon av en brøk det samme som en *brudden brøk*, som vi kommer til senere.

Å dividere en brøk på et helt tall Et helt tall er jo egentlig også en brøk, bare at nevneren er 1. Slik sett er både det å dividere en brøk på et helt tall, og det å dividere et helt tall på en brøk bare spesialtilfeller av å dividere en brøk på en brøk. Vi kan likevel se litt på de for seg som en introduksjon. La oss ta det megetsigende eksempelet en halv delt på to ($\frac{1}{2} : 2$). Vi vet jo at halvparten av $\frac{1}{2}$ er $\frac{1}{4}$. Vi ser da at dette blir det samme som å multiplisere $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, som vi gjorde over. Dette stemmer med at deletegnet og brøkstreken egentlig er to forskjellige tegn for det samme. Altså

$$\frac{1}{2} : 2 \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \ .$$

Når vi deler en brøk på et helt tall, blir det det samme som å multiplisere det hele tallet i *nevneren*. Det vil si:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{5} &: \; 4 = \frac{4}{5 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}} \text{ (med en kjapp forkorting),} \\
\frac{4}{3} &: \; 9 = \frac{4}{3 \cdot 9} = \underline{\underline{\frac{4}{27}}} \text{ (som ikke kan forkortes, sjekk gjerne) ,} \\
& \text{osv.}
\end{aligned}$$

Dette er helt naturlig, dersom vi husker at et divisjonstegn og en brøkstrek egentlig er det samme.

Å dividere et helt tall på en brøk Vi sa over at å dividere noe på 2 var det samme som å multiplisere det samme med en halv. Når vi nå ser på et motsatt eksempel

$$2 : \frac{1}{2} = ? \; ,$$

ser vi at å dele 2 på $\frac{1}{2}$ må bli det samme som å multiplisere 2 med 2, eller rettere sagt

$$2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 2}{1} = \underline{\underline{4}} \; .$$

Å dividere med en brøk er det samme som å multiplisere med den omvendte brøken. Vi skal undersøke nøyere hvordan det blir slik under biten med brudden brøk.

Å dividere en brøk på en brøk Det samme blir tilfellet når vi skal dividere en brøk på en brøk, altså: *Å dividere med en brøk er det samme som å multiplisere med den omvendte brøken.* Vi kan ta et eksempel:

$$\frac{5}{3} : \frac{4}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \quad .$$

Det var vel greit nok. Sammenlign gjerne også dette med brudden brøk som vi kommer til straks i del tre.

1.3 TRE: Snacks (brudden brøk og prosent)

1.3.1 Brudden brøk

En brudden brøk er en brøk hvor *teller og/eller nevner i brøken selv er en brøk.* Eksempler på brudne brøker er

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}, \; \frac{5}{\frac{4}{7}}, \; \frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}}, \; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}, \text{ osv.}$$

Når vi har en slik brøk ønsker vi ofte å *forenkle den* til en vanlig brøk. Dette kan vi gjøre på to måter.

Gjøre om brøkstreken til divisjonstegn Først så husker vi at noe av det første vi sa var at brøkstreken er det samme som divisjonstegnet. Det betyr at vi kan erstatte brøkstreken med et slikt et, og slike tilfeller lærte vi oss å håndtere i forrige kapittel. Dersom vi gjør dette på eksemplene over, får vi følgende regnestykker:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}}{7} &= \frac{2}{3} : 7 = \frac{2}{3 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{2}{21}}}\,, \\
\frac{5}{\frac{4}{7}} &= 5 : \frac{4}{7} = 5 \cdot \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 7}{4} = \underline{\underline{\frac{35}{4}}}\,, \\
\frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}} &= \frac{7}{3} : \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{28}{9}}}\,, \\
\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Studer disse eksemplene nøye, slik at du er inneforstått med nøyaktig hva som skjer i hvert trinn.

Multiplisere med fellesnevner Den andre måten å løse opp en brudden brøk på, og kanskje den mest vanlige, er *å multiplisere med teller og nevner i hovedbrøken med fellesnevner for smånevnerne.*

Noen ordrforklaringer først: Hovedbrøken er hele den store brøken. Småbrøkene er de brøkene som er teller og nevner i hovedbrøken. For eksempel: I $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}}$ er hele brøken ($\frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}}$) hovedbrøken, mens $\frac{7}{3}$ og $\frac{3}{4}$ er småbrøkene. $\frac{7}{3}$ er teller i hovedbrøken, og $\frac{3}{4}$ er nevner i hovedbrøken.

Smånevnerne er nevnerne i småbrøkene, i dette tilfellet 3 og 4. Dersom en av "småbrøkene" er et helt tall, som det f.eks. er i $\frac{\frac{2}{3}}{7}$, hvor 7 utgjør telleren i hovedbrøken, blir nevneren til 7 lik 1 (siden $7 = \frac{7}{1}$).

Vi husker at vi kan multiplisere en brøk med det samme tallet i teller og nevner (utvide brøken), og den vil fremdeles være det samme tallet. Poenget med å multiplisere med *fellesnevneren for smånevnerne* er at vi da vet at vi multipliserer med et tall som gjør at vi kan forkorte de bort, og slik står igjen med en *vanlig brøk*.

Følg trinnene når vi tar de samme eksemplene med denne metoden, og sammenlign med metoden over. Ser du likhetstrekk i det som foregår?

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}}{7} &= \frac{\frac{2}{3} \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{2}{3 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{2}{21}}}\,, \\
\frac{5}{\frac{4}{7}} &= \frac{5 \cdot 7}{\frac{4}{7} \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7}{4} = \underline{\underline{\frac{35}{4}}}\,, \\
\frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}} &= \frac{\frac{7}{3} \cdot 12^{*}}{\frac{3}{4} \cdot 12^{*}} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{28}{9}}},
\end{aligned}
$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6}{\frac{1}{3}\cdot 6} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \,.$$

(*Her er 12 fellesnevneren til 3 og 4, og vi ser at vi får igjen henholdsvis 4 og 3 når vi forkorter bort smånevnerne, dvs $\frac{12}{3} = 4$ og $\frac{12}{4} = 3$.)

Slik, da har vi to måter å gjøre det samme på, fint ikke sant? Valgfrihet er jo så moderne om dagen...

1.3.2 Prosent

Vi koster på oss et eget lite kapittel om prosent, fordi det er ofte brukt, ikke fordi det er spesielt vanskelig. Prosent er det samme som hundredeler, derfor hører dette naturlig sammen med brøkregning. Dette vil enkelt og greit si at

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03 \,.$$

Prosent er til og med så enkelt at det alltid gir oss brøker som kan skrives som desimaltall (i og med at vi har et titallssystem og 100 er $10 \cdot 10$). Her burde det altså ikke være noen utfordringer å snakke om for den som har lest det som stod over. Det er likevel et par punkter vi må passe på, og regnetrening trengs alltid, så vi tar noen eksempler.

Vi kan først ta et par enkle eksempler.

Hva er 15% av 50 g hvetemel?

Den enkleste måten å tenke på er å først finne 1%, og så multiplisere opp med det antall prosent du skal ha.

1% av 50 g er som sagt $\frac{50 \text{ g}}{100} = 0,50$ g. Vi skal ha 15%, så da må vi multiplisere med 15, altså:

$$15\% \text{ av } 50 \text{ g } = 15 \cdot \frac{50 \text{ g}}{100} = 15 \cdot 0,50 \text{ g} \underline{\underline{\; = 7,50 \text{ g}}} \,,$$

så da er det bare å begynne å bake kake til 0, 15 personer.

Når vi skal finne prosentandelen av noe, deler vi altså på 100*, og multipliserer med antall prosent.*

Vi tar et eksempel til, hvor vi tar tak i den mest vanlige prosentregningsfeilen:

14 år gamle Silje må ha et nytt par Miss Sixty-bukser for ikke å bli mobbeobjekt i jentegjengen. For å få råd til disse har hun stjælt 400 kr fra lommeboka til mor i tillegg til de 1000 kr hun fikk fra bestemor og bestefar til jul. Hun har altså 1400 kr, og ønsker selvsagt å ha en så dyr bukse som mulig, da det gir størst status i gjengen. Silje er heldig, for Miss Sixty-butikken har januarsalg, og 23% rabatt på alle varer. På buksene står den opprinnelige prisen. Silje ønsker som sagt en så dyr bukse som mulig. Hvilket beløp må hun lete etter på prislappen?

Nå har vi en oppgave hvor vi kjenner avslagsprisen (Silje ønsker å betale 1400 kr), men ønsker å finne den opprinnelige prisen (den som står på prislappen på buksa). *

Vi har altså en ukjent opprinnelig pris som vi kan kalle x (som vi gjorde i kapittelet om å utvide brøker, bli heller ikke denne gangen skremt av x). Fra regningen over husker vi at vi finner avslaget ved å ta denne, dele på 100 og multiplisere med antall prosen (23), vi får altså:

$$\frac{x}{100} \cdot 23 = \text{avslaget} \; .$$

Men det tallet vi har (1400 kr) er ikke avslaget, men $x-$ avslaget. Siljes 1400 kr er altså det resterende, og hvor mange prosent er det resterende, etter at 23% er trukket fra? Selvsagt

$$(100 - 23)\,\% = 77\% \; .$$

Når avslaget er på 23% blir altså rabattprisen 77% av den opprinnelige. Ligningen vi er interessert i ser da slik ut:

$$\begin{aligned} \frac{x}{100} \cdot 77 &= \text{rabattprisen}, \\ \frac{x}{100} \cdot 77 &= 1400 \text{ kr}. \end{aligned}$$

Når vi løser denne ligningen på vanlig måte, får vi da

$$x = \frac{1400 \text{ kr}}{77} \cdot 100 \; .$$

Er man ikke så god til å løse ligninger fkan man alternativt tenke på følgende måte: 1400 kr er 77%. 1% blir da $\frac{1400 \text{ kr}}{77}$. Vi er ute etter den opprinnelige prisen. Den er 100%. Da blir denne

$$1\% \cdot 100 = \frac{1400 \text{ kr}}{77} \cdot 100 \underline{\underline{= 1818,18 \text{ kr}}}.$$

Silje må altså prøve å finne en bukse som ligger så nært oppunder 1818, 18 kr som mulig.

(* Nå er det veldig viktig at vi *ikke* går i den fella det er å bare legge på 23% på avslagsprisen. 23% av 1400 kr er nemlig ikke det samme som 23% av 2000 kr, eller hva den opprinnelige prisen nå måtte være, og når det er avslag i en butikk, er det naturligvis alltid i prosent av den *opprinnelige* prisen. For å illustrere dette veldig tydelig kan vi jo late som om avslaget er på 50%, og prisen etter at det er trukket fra er 500 kr, 50% av 500 kr er jo 250 kr, men her ser alle at den opprinnelige prisen er 1000 kr.)

Avsluttende kommentar Slik, det var det. Har du fått med deg dette nå, så bør du være en habil brøkregner, men husk: skal man få det i fingra må man regne oppgaver, så rekna på!

2 Algebra (parenteser, ligninger og sånn)

Nå skal vi begynne å se litt på algebra. (Det som på ungdomsskolen kalles algebra altså, som bare er en bitte liten del av det som kalles algebra på universitetet, nåvel - et forsøk på en oppklarende digresjon.) Dette er en av de viktigste delene av matematikken, hvor vi regner ut uttrykk (gjerne med både tall og bokstaver), og løser ligninger (det er viktig å vite hvilke av disse to tingene man driver med). Vi begynner litt forsiktig med Parenteser, og noen generelle regneregler.

2.1 Parenteser

Multiplisere, addere, subtrahere og dividere, kan vi. Det som vi derimot også må komme på, når vi har sammensatte uttrykk som består av mer enn to tall og en regneart, er hvilken rekkefølge vi skal gjøre disse operasjonene i. Til det kan parenteser være til hjelp.

Matematikk er et språk, og som i andre språk betyr forskjellige tegn forskjellige ting. Når vi ser parenteser i et uttrykk, som for eksempel

$$3 \cdot (4 + 3) \ ,$$

betyr det at vi skal regne ut det som står *inni* parentesen *først*. Ellers gjelder det i matematikken at vi multipliserer og dividerer *før* vi adderer og subtraherer. Altså kan vi skissere følgende fremgangsmåte for å forenkle algebraiske uttrykk:

1. Regn først ut det som er inni parentesene

2. Utfør så alle multiplikasjoner og divisjoner

3. Adder og subtraher så det gjenstående fra venstre mot høyre

Denne framgangsmåten kan vi nå bruke på noen eksempler:

$$(4 + 3) \cdot 3 + 3 - 1 \cdot \left(\frac{9}{3}\right)$$

1. Først regner vi ut det som er inni parentesene:

$$= (7) \cdot 3 + 3 - 1 \cdot (3)$$

Når vi har gjort det kan vi fjerne parentesene, de er nå unødvendige, vi står da igjen med:

$$= 7 \cdot 3 + 3 - 1 \cdot 3$$

2. Så multipliserer og dividerer vi:

$$= 21 + 3 - 3$$

3. Da står bare addisjon og subtraksjon igjen, og vi ser her at det rett og slett blir:

$$= \underline{\underline{21}} \ .$$

Dette kan vi prøve på et par eksempler til, slik at vi kan se hvordan det arter seg for litt forskjellige regnestykker. Vi forsøker nå uten så mange kommentarer:

$$\begin{aligned} & 5-(8-4)\cdot 3+4 \\ = \quad & 5-(4)\cdot 3+4 \\ = \quad & 5-12+4 \\ = \quad & \underline{\underline{-3}} \ . \end{aligned}$$

$$(8-3\cdot(4+3))\cdot 2-(4\cdot 2-1)$$

Her har vi et mer komplisert eksempel med en parentes *inne i* en annen parentes. Når vi skal trekke sammen leddene inne i den ytterste parentesen, må vi selvsagt også følge reglene skissert over, dvs vi regner ut det som er i den innerste parentesen først. I slike mer kompliserte uttrykk jobber vi alltid *innenfra og utover*, altså:

$$\begin{aligned} & (8-3\cdot(7))\cdot 2-(8-1) \\ = \quad & (8-21)\cdot 2-(7) \\ = \quad & (8-21)\cdot 2-(7) \\ = \quad & (-13)\cdot 2-7 \\ = \quad & -26-7 \\ = \quad & \underline{\underline{-33}} \ . \end{aligned}$$

Nå vet vi hvordan vi skal regne ut kompliserte talluttrykk med parenteser. Da er det bare å øve seg.

2.2 Variabler

Nå skal vi begynne å se litt på variabler, eksempler på variable er den beryktede bokstaven x, som alle er så redde for. Dette er egentlig helt unødvendig. For det første er x som regel bare et helt vanlig tall, vi vet bare ikke helt hvilket før vi begynner med oppgaven. For det andre kan x, av og til med hjelp av kompisen y, gjøre de lange og grufulle tekstoppgaven (Når Per kjører fra Gjøvik i 70 km/h med 5 liter melk og Siri kjører fra Hamar i 90 km/h med 5 dl rømme... og så videre) vanvittig mye enklere å løse.

Vi begynner med et enkelt eksempel:

Per jobber i Omicron Forlag, og skal sende bokpakker til alle sine kunder. Hver pakke han sender koster $50,-$ kr i porto. I tillegg må han betale nabogutten 100 kr for å sykle på postkontoret med pakkene. Sett opp et uttrykk for de totale forsendelsesutgiftene en dag, når x er antall pakker han sender:

Uttrykket for utgiften blir da:

$$100+50\cdot x \ .$$

Når Per da vet hvor mange pakker han skal sende ut på en gitt dag, kan ha bare sette inn i formelen.

12. september 2005 skulle Per sende "Valgboka '05" til 438 kunder. Når vi skal finne ut hvilke utgifter han da hadde, setter vi inn antall forsendelser (438) for x, og vi får:

Per må betale:

$$100 + 50 \cdot x \text{ kr} = 100 + 50 \cdot 438 \text{ kr} = \underline{\underline{22000 \text{ kr}}} \quad .$$

2.2.1 Mer notasjon:

Når vi regner med variabler, og med parentesuttrykk, bruker vi i matematikken ofte å forenkle skrivemåten noe ved å la være å skrive multiplikasjonstegnet. Det vil konkrét si at

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \cdot x \quad , \\ 5\,(x+2) &= 5 \cdot (x+2) \quad , \\ (2+3)\,(4-5) &= (2-7) \cdot (7+8) \quad . \end{aligned}$$

OK?

2.2.2 Uttrykk med variable

Akkurat som med (andre) tall kan vi multiplisere, dividere, subtrahere og multiplisere med variable. For eksempel blir

$$\begin{aligned} 4a + 3a &= 7a \\ 9c - 3c &= 6c \end{aligned}$$

Dette er helt analogt med at for eksempel

$$\begin{aligned} 9 \cdot 4 - 3 \cdot 4 &= 6 \cdot 4 \, , \\ 36 - 12 &= 24 \, , \end{aligned}$$

men når vi bruker bokstaver, får vi et uttrykk som skal stemme uansett hvilket tall vi setter inn i stedet for den variable.

Videre kan vi (for de som husker potensreglene*) også multiplisere:

$$\begin{aligned} y \cdot y &= y^2 \\ x \cdot x \cdot x \cdot x &= x^4 \, , \end{aligned}$$

og dividere:

$$\frac{d \cdot d \cdot d \cdot d}{d} = d \cdot d \cdot d = d^3 \quad .$$

(* Potenser er en enklere måte å beskrive multipli av samme tall, hvor eksponenten (det som står oppe til høyre), beskriver hvor mange ganger tallet (som kalles grunntallet) er multiplisert med seg selv. Dvs. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$, og så videre.)

2.2.3 Variable og parenteser

Når vi har variable i uttrykk med parenteser, gjelder de samme reglene som for andre uttrykk med parenteser. Det er likevel et viktig skille. Når vi har variable i et uttrykk er det ikke sikkert vi kan trekke sammen parentesen først. Derfor et par ekstra tommelfingerregler:

Å multiplisere en faktor med et parentesuttrykk, *er det samme som å multiplisere faktoren med hvert av leddene i parentesen.* Dvs.

$$2\,(3+5) = 2\cdot 3 + 2\cdot 5$$

Regn over sjøl for å sjekke. Tilsvarende med variabler:

$$a\,(b+c) = ab + ac$$

(her kan vi som nevnt unnlate å skrive multiplikasjonstegnene).

Dette gjelder selvsagt også fortegn. Når vi har et negativt fortegn foran en parentes, betyr det at den er multiplisert med -1. Når vi da skal løse opp parentesen, må vi huske å multiplisere alle ledd i den med -1, det vil si at vi må skifte fortegn på de. Et par eksempel:

$$-1\cdot(4+5a) = -1\cdot 4 + (-1)\cdot 5a = \underline{\underline{-4-5a}}$$

$$-\,(5-a+b) = -5 - a\cdot(-1) - b = \underline{\underline{-5+a-b}}$$

OK? Når det står et minustegn utenfor parentesen, må altså alle leddene i parentesen skifte fortegn når vi skal løse den opp.

2.3 Forenkling

Når vi har et uttrykk, er vi som regel ute etter å skrive det på en enklest mulig måte. Vi ønsker å løse opp parentesene, trekke sammen leddene og så videre. Vi bruker da rekkefølgen vi lærte i kapittelet over, om parenteser, og vi kan nå også trekke sammen uttrykk med variabler. Vi tar noen eksempler for å illustrere dette, følg med på stegene.

$$\begin{aligned} & a\,(3-1) + 3(4a+3a) \\ = \; & a\cdot 2 + 3\cdot 7a \\ = \; & 2a + 21a \\ = \; & \underline{\underline{23a}} \end{aligned}$$

Enkelt og greit.

$$b\,(a+8) - (b+5b)\cdot 2$$

Denne ser vi var litt verre. Her har vi størrelser som vi ikke kan addere i den ene parentesen $(a+8)$. Da må vi utnytte det vi lærte over, å multiplisere faktoren inn i parentesen:

$$= (ab + 8b) - 6b \cdot 2$$

Da er vi på en form vi enkelt kan håndtere. $6b \cdot 2$ blir selvsagt $12b$, og vi får da:

$$\begin{aligned} &= ab + 8b - 12b \\ &= \underline{\underline{ab - 4b}} \; . \end{aligned}$$

Vi tar en til til slutt:

$$\begin{aligned} & -a\,(b+2) - (a-5)\,b \\ = \; & -ab - 2a - ab + 5b \\ = \; & \underline{\underline{3a - 2ab}} \end{aligned}$$

Her gikk det fort i svingene. Sett deg ned med "pappir og blyant", og sørg for at du skjønner alt som skjer mellom linjene her. Når det er på plass, er du godt rustet i å forenkle uttrykk. Husk: Det er bare trening som nytter!

2.4 Ligninger

2.4.1 Uttrykk og ligninger

Lingninger er noe annet enn uttrykk. I et uttrykk skal vi bare forsøke å skrive uttrykket på enklest mulig måte, trekke sammen variable osv. I en ligning har vi derimot en bestemt variabel vi skal finne ut størrelsen på. En oppgave med uttrykk kan f.eks. se slik ut:

Regn ut:

$$2a + 5\,(a+3) \; .$$

En ligning vil derimot se slik ut: Finn den ukjente variabelen y :

$$5 + y = 35 \; .$$

Ser dere forskjellen?

2.4.2 Hva kjennetegner en ligning?

Det viktigste kjennetegnet på en ligning er nettopp det at de uttrykkene som står på hver sin side av likhetstegnet er like store:

$$x - 2 = 5$$

I dette enkle eksempelet er $x-2$ nøyaktig lik 5. Så lenge vi vet at det som står på hver side av likhetstegnet er like stort er det enkelte ting vi kan gjøre, uten at vi endrer likheten. Hvis vi adderer, subtraherer, multipliserer, eller dividerer med *det samme tallet på begge sider av ligningen*, vil identiteten være bevart, det vil si: vi kan fremdeles skrive likhetstegn mellom de to uttrykkene.

Vi begynner med et eksempel: Vi vet at

$$5 = 5\ .$$

Som sagt kan vi addere og subtrahere på begge sider, og det er selvsagt innlysende at dersom vi subtraherer med to på begge sider, så får vi

$$\begin{aligned} 5-2 &= 5-2 \\ 3 &= 3\ , \end{aligned}$$

og at $3 = 3$ ser vi vel stemmer ganske bra - dvs. identiteten er bevart.

Det samme gjelder også for eksemplet $x-2=5$. Dersom vi vet at $x-2=5$, vet vi også at

$$\begin{aligned} x-2-2 &= 5-2 \\ x-4 &= 3\ . \end{aligned}$$

Det sentrale med en ligning er altså nettopp det at det som står på de to sidene har samme verdi. Tilsvarende kan vi multiplisere

$$\begin{aligned} (x-2)\cdot 2 &= 5\cdot 2 \\ 2x-4 &= 10\ . \end{aligned}$$

Så lenge vi multipliserer med *det samme tallet* i *alle ledd* på *begge sidene* av ligningen, vil identiteten være bevart.

Dette er viktig, så vi gjentar betingelsene: Identiteten i en ligning er bevart dersom:
1 Vi adderer eller subtraherer
i) med det samme tallet
ii) på begge sidene av ligningen
2 Vi multipliserer eller dividerer
i) med det samme tallet
ii) i alle ledd
iii) på begge sidene av ligningen

Alle underpunktene må være oppfylt. Dersom du er i tvil, sett deg opp noen ligninger med bare tall (uten variable), og prøv deg fram, til du ser sammenhengene. Et eksempel:

$$\begin{aligned} 7+3 &= 5+5 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

Dette er vi enige om. Vi tar så å adderer med 4 på begge sider:

$$\begin{aligned} 7+3+4 &= 5+5+4 \\ 14 &= 14\ . \end{aligned}$$

Identiteten er bevart.

Det samme skjer dersom vi multipliserer med det samme tallet i alle ledd:

$$\begin{aligned} (7+3)\cdot 3 &= (5+5)\cdot 3 \\ 7\cdot 3+3\cdot 3 &= 5\cdot 3+5\cdot 3 \\ 21+9 &= 15+15 \\ 30 &= 30. \end{aligned}$$

Disse reglene gjelder selvsagt også om vi setter inn variable (bokstaver) i stedet for tall.

2.5 Å løse en ligning

Vi skal her holde oss til enkle førstegradsligninger, med én ukjent. Dvs. det det for oss stort sett vil handle om er å finne x. For at vi skal finne hva x er, må vi gjøre om uttrykket slik at vi får x for seg selv på den ene siden av ligningen, og et tall på den andre, f.eks. $x = 5$. Når vi skal gjøre dette benytter vi oss av de identitetsbevarende reglene vi fant over.

2.5.1 + og -

Vi tar først og ser på + og -.

Løs ligningen

$$x - 5 = 2$$

Her ser vi at vi har -5 sammen med x på venstre side av ligninga. Vi ønsker som sagt å ha x alene. Da må vi fjerne -5, og hvordan kan vi gjøre det? Vi husker at identiteten er bevart så lenge vi subtraherer eller adderer det samme på begge sider av likhetstegnet. *Da kan vi benytte oss av dette til å få x alene på venstre side.*

Vi ser nå at dersom vi adderer med 5 på begge sider, vil vi bli kvitt 5-tallet på venstre side:

$$\begin{aligned} x-5+5 &= 2+5 \\ x &= 2+5 \\ x &= 7\ . \end{aligned}$$

Vi har nå funnet x, og $x = 7$.

Vi tar et eksempel til:

$$\begin{aligned} x+8 &= 3 \\ x+8-8 &= 3-8 \\ x &= 3-8 \\ x &= -5\ . \end{aligned}$$

Verre er det ikke. Når du har regnet en del oppgaver med å legge til og trekke fra på begge sider, begynner du å se mønsteret, og vi kan forenkle retorikken/skrivemåten litt: Vi ser at det å legge til/trekke fra det samme sifferet på begge sider for å få x for seg selv, det tilsvarer det vi ofte kaller å "*flytte over og skifte fortegn*".

Dersom vi tar eksempelet over:

$$x+8=3$$

ser vi at dersom vi flytter over 8-tallet, og skifter fortegn, blir resultatet det samme som over:

$$\begin{aligned} x &= 3-8 \\ x &= -5\ . \end{aligned}$$

Dette er en tenkemåte som gjør at regningen går fortere, men ikke glem at det vi *egentlig* gjør er å addere/subtrahere med det samme tall på begge sider.

2.5.2 · og :

La oss så se på hvordan vi løser en ligning hvor den ukjente er multiplisert med en faktor, eller er en del av en brøk. Vi begynner enkelt:

$$2x=5$$

Her benytter vi oss av regelen over som sier at vi kan dividere med det samme tallet i alle ledd på begge sider av ligningen. Det vi må dividere med for å få x for seg selv på venstre side her, er selvsagt 2.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2} &= \frac{5}{2} \\ x &= \frac{5}{2}\ . \end{aligned}$$

Nå ser vi at vi har fått et svar, vi har funnet vår ukjente: $x=\frac{5}{2}$.

Tilsvarende kan vi gjøre når den ukjente er dividert med en faktor, for eksempel

$$\frac{x}{5}=3$$

Når vi nå ønsker å få x for seg selv på venstre side av ligningen, ser vi at vi kan multiplisere med 5 på begge sider av ligningen.

$$\begin{aligned}\frac{x}{5}\cdot 5 &= 3\cdot 5\\ x &= 15\ .\end{aligned}$$

Sesål!

2.5.3 Kombinasjoner

De fleste ligninger er kombinasjoner av slike uttrykk, du kan for eksempel ha $5x+8=3$, eller $\frac{8}{x}-7=0$. Når vi har mer kompliserte uttrykk, lønner det seg å følge en bestemt framgangsmåte for å få den ukjente for seg selv på den ene siden av lingningen:

1. Dersom den ukjente befinner seg i nevneren på en brøk (som i det andre eksempelet over), begynn med å multiplisere med den ukjente (i alle ledd på begge sider av likhetstegnet). Vi ønsker jo å finne hva $x=$, ikke $\frac{1}{x}=$.

2. Begynn så med å flytte alle leddene som har en ukjent i seg over på den ene siden av ligningen, og de rene tall-leddene over på den andre. Trekk så sammen på hver side.

3. Nå skal du stå igjen med en ukjent multiplisert og/eller dividert med et tall på den ene siden av lingingen, og et tall på den andre. Da tar vi til slutt og dividerer og/eller multipliserer på begge sider som beskrevet over slik at vi får den ukjente for seg selv på den ene siden, og et tallsvar på den andre.

Vi tar noen eksempler på dette:

$$2x+5=9x-3$$

Vi flytter alle ledd med x i over på venstre side av ligningen, og alle uten på høyre side:

$$2x-9x=-3-5$$

OK? Så dette greit ut? Da kan vi trekke sammen leddene:

$$-7x=-8$$

Da ser vi at vi må dividere med -7 på begge sider for å få x alene på venstre side:

$$\begin{aligned}\frac{-7x}{-7} &= \frac{-8}{-7}\\ x &= \frac{8}{7}\ .\end{aligned}$$

Sesål, det var vel ikke så ille.

Vi kjører på med et par eksempler til, denne gangen uten kommentarer - se om du klarer å følge med på hva som skjer, og regn ved siden av på egen hånd.

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{x} + 3 &= 8 \\
5 + 3x &= 8x \\
5 &= 8x - 3x \\
5 &= 5x \\
\frac{5}{5} &= \frac{5x}{5} \\
1 &= x \\
x &= 1\ .
\end{aligned}
$$

Og en til:

$$
\begin{aligned}
x + 8 - 3x + 2 &= 5x - 7 + 3 \\
x - 3x - 5x &= -7 + 3 - 8 - 2 \\
-7x &= -14 \\
\frac{-7x}{-7} &= \frac{-14}{-7} \\
x &= 2\ .
\end{aligned}
$$

Sånn skal det gjøres! Med litt trening burde du nå være i stand til å møte det meste av førstegradsligninger med krum nakke. Lykke til.